

DẠNG LŨY THỪA THỰC CỦA MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU YOUNG

Hồ Xuân Thiên Bá¹, Phạm Thị Phương Trang¹

Ngày nhận bài: 06/5/2022; Ngày phản biện thông qua: 22/8/2022; Ngày duyệt đăng: 23/8/2022

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng một số kết quả về bất đẳng thức kiểu Young được đưa ra bởi Daeshik Choi (*Math. Inequal. Appl.* 21 (2018), no. 1, 99–106.) tới lũy thừa thực. Chúng tôi cũng đưa ra một số ứng dụng của các kết quả này vào lý thuyết ma trận.

Từ khóa: bất đẳng thức Young, định thức, ma trận xác định dương.

1. MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức về trung bình số học và trung bình hình học được nhiều tác giả trong nước quan tâm và nghiên cứu. Chẳng hạn, như Nguyễn Văn Mậu (Mậu, 2006), Phạm Kim Hùng (Hùng, 2006), Võ Quốc Bá Cẩn và Trần Quốc Anh (Cirtoaje et al., 2010). Các nghiên cứu đó chủ yếu hướng đến việc chứng minh các bất đẳng thức cổ điển khác hoặc hướng đến xây dựng các kỹ thuật để ứng dụng các bất đẳng thức này. Ngược lại, việc tìm kiếm những bất đẳng thức mới, các đánh giá tốt hơn ít được quan tâm nghiên cứu. Vì vậy, cần tập trung vào các làm mịn, làm ngược các bất đẳng thức cũng như ứng dụng của chúng vào nhiều lĩnh vực. Ở bài báo này, chúng tôi quan tâm đến Bất đẳng thức Young mà cụ thể hơn là “Tổng quát dạng lũy thừa thực của bất đẳng thức kiểu Young”. Trước hết chúng tôi sẽ trình bày tổng quát về những kết quả nghiên cứu của các nhà toán học về bất đẳng thức Young.

Bất đẳng thức cổ điển Young là trường hợp riêng của bất đẳng thức giữa trung bình số học và trung bình hình học (AM-GM):

$$(1-v)a + vb \geq a^{1-v}b^v$$

trong đó $a, b > 0, 0 \leq v \leq 1$. Kittaneh và Manasrah (Kittaneh & Manasrah, 2010; Manasrah & Kittaneh, 2015) đưa ra các làm mịn và làm ngược đáng chú ý là

$$(1-v)a + vb \geq a^{1-v}b^v + r(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (1)$$

$$(1-v)a + vb \leq a^{1-v}b^v + R(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (2)$$

Trong đó: $r = \min\{v, 1-v\}, R = \max\{v, 1-v\}$.

Đối với lũy thừa bậc cao, Kittaneh và Manasrah (Al-Manasrah & Kittaneh, 2015) đã chứng minh được bất đẳng thức

$$\left((1-v)a + vb\right)^m \geq \left(a^{1-v}b^v\right)^m + r^m \left(a^{m/2} - b^{m/2}\right)^2$$

trong đó m là số nguyên dương. Một kết quả tốt hơn được Daeshik Choi (Choi, 2018) đưa ra và chứng minh là

$$\left((1-v)a + vb\right)^m \geq \left(a^{1-v}b^v\right)^m + (2r)^m \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^m - \sqrt{ab}\right]^m,$$

$$\left((1-v)a + vb\right)^m \leq \left(a^{1-v}b^v\right)^m + (2R)^m \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^m - \sqrt{ab}\right]^m$$

với m là số nguyên dương.

Mục tiêu chính của chúng tôi trong bài báo này là mở rộng các kết quả của Daeshik Choi ở trên từ lũy thừa nguyên m đến trường hợp số thực $p \geq 1$.

2. NỘI DUNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Nội dung nghiên cứu

Bài báo tập trung nghiên cứu về bất đẳng thức Young dạng vô hướng. Dựa vào các kết quả này, chúng tôi thiết lập các dạng tương ứng cho bất đẳng thức vết và định thức của ma trận xác định dương.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng một số phương pháp nghiên cứu toán lý thuyết như đạo hàm của lý thuyết hàm một biến số để xét tính đơn điệu của một số bất đẳng thức liên quan. Để phát triển tốt điều này, chúng tôi sử dụng một số kỹ thuật và phương pháp chứng minh của Daeshik Choi cùng một số kỹ thuật mới được phát triển trong bài báo này.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Bất đẳng thức kiểu Young

Mệnh đề 3.1.1. Cho là các số thực dương thỏa mãn $a > c, b > d$. Đặt hàm

$$f(t) = \left(\frac{a^t - c^t}{b^t - d^t}\right)^{\frac{1}{t}}, t > 0, t \in \mathbb{R}.$$

¹Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;

Tác giả liên hệ: Hồ Xuân Thiên Bá; ĐT: 0346231276; Email: hxthienba@gmail.com.