

MỘT SỐ KẾT QUẢ ỔN ĐỊNH CHO MÔĐUN M/I^nM

Phạm Hữu Khánh¹

Ngày nhận bài: 01/7/2022; Ngày phản biện thông qua: 20/8/2022; Ngày duyệt đăng: 23/8/2022

TÓM TẮT

Cho (R, m) là vành giao hoán Noether địa phương, M là R -môđun Cohen-Macaulay hữu hạn sinh và I là idêan của vành R mà không chứa trong bất kỳ idêan nguyên tố cực tiểu nào của M . Trước hết chúng tôi chứng minh rằng tồn tại số nguyên t_1 sao cho $\text{depth}_{R_p}(M/I^nM)_p = \text{depth}_{R_p}(M/I^{t_1}M)_p$, với mọi $n \geq t_1$ và mọi $p \in \text{Spec}(R)$. Thứ hai, chúng tôi chứng minh với mọi số nguyên $i \geq 0$, tập hợp $\bigcup_{j \leq i} \text{Var}(a_j(M/I^nM))$ ổn định khi n đủ lớn.

^{$j \leq i$} **Từ khóa:** Ổn định, độ sâu, linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương.

1. MỞ ĐẦU

Cho (R, m) là vành giao hoán Noether địa phương, I là idêan của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Bài toán nghiên cứu đáng chú ý của tập idêan nguyên tố liên kết $\text{Ass}_R(R/I^n)$ được L. J. Ratliff đưa ra vào năm 1976. Năm 1979, M. Brodmann đã chứng minh bài toán của Ratliff không chỉ cho vành mà còn tổng quát cho cả môđun và cho trường hợp phân bậc. Ông ta chứng minh rằng các tập idêan nguyên tố liên kết $\text{Ass}_R(M/I^nM)$ và $\text{Ass}_R(I^nM/I^{n+1}M)$ ổn định khi n đủ lớn (M. Brodmann, 1979a). Ở đây, khái niệm ổn định được hiểu theo nghĩa như sau: Một dãy các tập hợp (X_n) được gọi là ổn định khi n đủ lớn nếu tồn tại số nguyên n_0 sao cho $X_n = X_{n_0}$, với mọi $n \geq n_0$. Một cách tương tự, dãy số (a_n) được gọi là ổn định khi n đủ lớn nếu tồn tại số nguyên n_0 sao cho $a_n = a_{n_0}$, với mọi $n \geq n_0$.

Bằng cách dựa vào sự ổn định của các tập nguyên tố liên kết, M. Brodmann đã chứng minh các độ sâu $\text{depth}_R(M/I^nM)$ và $\text{depth}_R(I^nM/I^{n+1}M)$ ổn định khi n đủ lớn (M. Brodmann, 1979b). Từ đây, với mỗi idêan nguyên tố $p \in \text{Spec}(R)$, tồn tại số nguyên t_p sao cho $\text{depth}_{R_p}(I^nM/I^{n+1}M)_p$ không đổi với mọi $n \geq t_p$. Khi p thay đổi thì số nguyên t_p cũng thay đổi. Vấn đề được nhiều người quan tâm là có hay không số nguyên t sao cho $\text{depth}_{R_p}(I^nM/I^{n+1}M)_p$ không đổi $n \geq t$ và mọi $p \in \text{Spec}(R)$.

Sử dụng kết quả của C. Rotthaus and L. M. Sega 2006, L. T. Nhan và cộng sự đã chỉ ra rằng số nguyên t như vậy là tồn tại. Họ đã chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên t sao cho

$$\text{depth}_{R_p}(I^nM/I^{n+1}M)_p = \text{depth}_{R_p}(I^tM/I^{t+1}M)_p$$

với mọi $n \geq t$ và mọi $p \in \text{Spec}(R)$. (xem T. D. M. Chau, N. T. K. Nga and L. T. Nhan, 2021)

Tiếp theo, bài toán nghiên cứu tính ổn

định của tập idêan nguyên tố liên quan đến $\text{Ann}_R H_m^i(I^nM/I^{n+1}M)$ được quan tâm bởi nhiều người. Với mỗi số nguyên $i \geq 0$, chúng ta ký hiệu:

$$a_i(I^nM/I^{n+1}M) = \text{Var}(\text{Ann}_R H_m^i(I^nM/I^{n+1}M))$$

trong đó $\text{Var}(I) = \{p \in \text{Spec}(R) \mid I \subset p\}$. Một câu hỏi được đặt ra bởi L. T. Nhan và cộng sự vào năm 2021 là $a_i(I^nM/I^{n+1}M)$ có ổn định khi n đủ lớn? (xem T. D. M. Chau, N. T. K. Nga and L. T. Nhan 2021). Trả lời đầy đủ cho câu hỏi này là một vấn đề khó. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng khái niệm tập giả giá, L. T. Nhan và cộng sự đã chứng minh tính ổn định của tập các idêan nguyên tố $\bigcup_{j \leq i} \text{Var}(a_j(I^nM/I^{n+1}M))$ ổn định khi n đủ lớn.

Từ đây họ trả lời câu hỏi cho một số trường hợp đặc biệt (xem T. D. M. Chau, N. T. K. Nga and L. T. Nhan 2021).

Chúng ta biết rằng, nhiều tính chất đúng cho môđun $I^nM/I^{n+1}M$ thì cũng đúng cho môđun M/I^nM . Tuy nhiên, vẫn có một số tính chất đúng cho môđun $I^nM/I^{n+1}M$ nhưng không còn đúng cho môđun M/I^nM nữa. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất ổn định cho môđun M/I^nM như tính ổn định của $\text{depth}_{R_p}(M/I^nM)_p$ và của tập $\bigcup_{j \leq i} \text{Var}(a_j(M/I^nM))$.

2. PHƯƠNG PHÁP VÀ NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Phương pháp nghiên cứu

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng một số phương pháp sau đây để nghiên cứu:

- Các phương pháp nghiên cứu toán lý thuyết.
- Phương pháp đồng điều và đối đồng điều.
- Phương pháp sử dụng phương pháp địa phương hóa và đầy đủ hóa.

2.2. Nội dung nghiên cứu

¹Khoa Khoa học Tự nhiên & Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;

Tác giả liên hệ: Phạm Hữu Khánh; ĐT: 0905238905; Email: phkhanh@ttn.edu.vn.