DẠNG LŨY THỪA THỰC CỦA MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU YOUNG VỚI HỆ SỐ LOGARIT

Đinh Phương Thoại[1]

Ngày nhận bài: 10/5/2023; Ngày phản biện thông qua: 18/10/2023; Ngày duyệt đăng: 10/10/2023

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng một số kết quả gần đây liên quan đến dạng tổng quát lũy thừa thực của bất đẳng thức kiểu Young được đưa ra bởi các tác giả Hồ Xuân Thiên Bá và Phạm Thị Phương Trang (Tạp chí Khoa học Trường Đại học Tây Nguyên, số 55, năm 2022, trang 23 đến 27) với hệ số logarit. Đồng thời chúng tôi cũng đưa ra một số ứng dụng của các kết quả này vào lí thuyết toán tử. Phương pháp được chúng tôi sử dụng là lí thuyết bộ trội yếu.

Từ khóa: *Bất đẳng thức Young, Bất đẳng thức Young với hệ số logarit, Toán tử.*

1. MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức cổ điển Young được phát biểu dưới dạng

$$\left(1-\nu\right)a+\nu b\ge a^{1-\nu}b^{\nu}, \quad (1.1)$$

trong đó $a,b>0$, $0\le\nu\le1$. Bất đẳng thức này còn được biết đến với tên gọi bất đẳng thức trung bình số học - trung bình hình học có trọng. Nó đã được các nhà toán học quan tâm, phát triển theo nhiều hướng khác nhau. Một số các hướng phát triển tiêu biểu của bất đẳng thức này có thể kể đến như sau.

Trước hết, bất đẳng thức (1.1) được làm mịn hoặc làm ngược bằng cách thêm hoặc bớt ở vế phải một số đại lượng không âm nào đó. Một trong các thành tựu ấn tượng nhất của cách làm này phải kể đến công trình của các tác giả F. Kittaneh và Y. Manasrah (2010, 2011) được đưa ra như sau: Nếu $a,b>0$ và $\nu\in[0,1]$ thì ta có

$$a^{1-\nu}b^{\nu}+r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\le\left(1-\nu\right)a+\nu b\le a^{1-\nu}b^{\nu}+R_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2, \quad (1.2)$$

trong đó $r_0=\min\left\{\nu,1-\nu\right\}$, $R_0=\max\left\{\nu,1-\nu\right\}$.

Ở một hướng tiếp cận khác, bất đẳng thức (1.1) được phát triển bằng cách thêm vào đại lượng $a^{1-\nu}b^{\nu}$ một hệ số lớn hơn hoặc bằng 1, ta tạm gọi đây là hướng phát triển bất đẳng thức Young với các hệ số nổi tiếng như: Hằng số Kantorovich, tỉ số Specht, hệ số logarit… Trong bài viết này, chúng tôi quan tâm đến hướng phát triển với hệ số logarit. Hệ số này được định nghĩa như sau:

$$Q_N\left(\nu\right)=1+\frac{L\left(2^N\nu\right)}{2^{2N}}\left(\ln a-\ln b\right)^2,$$

$N=0;1;2;...$

trong đó, $L\left(\nu\right)=\dfrac{\nu^2}{2}\left(\dfrac{1-\nu}{\nu}\right)^{2\nu}$, $\nu\in\left(0,1\right]$ và $L\left(0\right)=0$. Rõ ràng, hàm L đối xứng qua $\frac{1}{2}$, nghĩa là, $L\left(\nu\right)=L\left(1-\nu\right)$, với $\nu\in[0,1]$. Từ đây, ta cũng thấy được với mỗi $\nu\in\left[0,1\right]$ thì $1+\dfrac{L\left(2^N\nu\right)}{2^{2N}}\ln^2 x$ tăng trên $\left[1,+\infty\right)$ và giảm trên $\left(0,1\right)$.

P. Kórus (2017) đã đưa ra một làm mịn của (1.1) ứng với hệ số logarit như sau

$$\left(1-\nu\right)a+\nu b\ge Q_0\left(\nu\right)a^{1-\nu}b^{\nu}. \quad (1.3)$$

C. Yang và cộng sự (2019) đã đưa ra một làm mịn của (1.1) tốt hơn (1.3) có dạng

$$\left(1-\nu\right)a+\nu b\ge Q_1\left(\nu\right)a^{1-\nu}b^{\nu}+r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2. \quad (1.4)$$

Gần đây, hai tác giả M. A. Ighachane và M. Akkouchi (2021) đã đạt được một thành công rất lớn khi đưa ra được làm mịn dạng chuỗi cho bất đẳng thức Young liên quan đến hệ số logarit như sau.

Cho a, b là hai số thực dương và $0\le\nu\le1$. Khi đó với mọi số nguyên dương N, ta có:

$$\left(1-\nu\right)a+\nu b\ge\left(1+\frac{L\left(2^N\nu\right)}{2^{2N}}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)a^{1-\nu}b^{\nu}+r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sum_{l=1}^{N-1}r_l\left(\nu\right)\sum_{k=1}^{2^l}f_{l,k}\left(a,b\right)\chi_{\left(\frac{k-1}{2^l},\frac{k}{2^l}\right)}\left(\nu\right) \quad (1.5)$$

trong đó, $r_l\left(\nu\right)$ và $f_{l,k}$ được xác định như sau:

$$r_l\left(\nu\right)=\begin{cases}2^l\nu-k+1, & \text{nếu } \dfrac{k-1}{2^l}\le\nu\le\dfrac{2k-1}{2^{l+1}}\\ k-2^l\nu, & \text{nếu } \dfrac{2k-1}{2^{l+1}}\le\nu\le\dfrac{k}{2^l}\end{cases}$$

.(1.6)

$$f_{l,k}\left(a,b\right)=\left(\sqrt{a^{\frac{k-l}{2^l}}b^{1-\frac{k-l}{2^l}}}-\sqrt{a^{\frac{k}{2^l}}b^{1-\frac{k}{2^l}}}\right)^2, \quad (1.7)$$

với $l,k\in\mathbb{N}$, $l\ge0$, $1\le k\le2^l$.

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;*
Tác giả liên hệ: Đinh Phương Thoại; ĐT: 0975287614; Email: 19101020@sv.ttn.edu.vn.