SỰ HỘI TỤ TRUNG BÌNH CHO MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN MỜ ĐỘC LẬP ĐÔI MỘT VÀ CÙNG PHÂN PHỐI TRONG KHÔNG GIAN TỔ HỢP LỒI

Phạm Trí Nguyễn[1]

Ngày nhận bài: 21/06/2023; Ngày phản biện thông qua: 06/12/2023; Ngày duyệt đăng: 10/12/2023

TÓM TẮT

Trong bài báo này, (Ξ, d) là không gian metric được trang bị phép toán tổ hợp lồi và gọi là không gian tổ hợp lồi. Dựa trên định nghĩa về không gian tổ hợp lồi đưa ra bởi Terán và Molchanov năm 2006, chúng tôi thiết lập sự hội tụ trung bình cho mảng kép các biến ngẫu nhiên và các biến ngẫu nhiên mờ độc lập đôi một cùng phân phối trong không gian tổ hợp lồi.

Từ khóa: *Hội tụ trung bình; Độc lập đôi một và cùng phân phối; Không gian tổ hợp lồi.*

1. MỞ ĐẦU

Ta biết rằng, nếu $\{X, X_1, X_2, ...\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên thực độc lập cùng phân phối với EX hữu hạn thì ta có sự *hội tụ theo trung bình* (Gut, 2005, p.309]),

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - EX\right| \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.$$ Kết quả này sau đó đã được nhiều tác giả nghiên cứu và mở rộng, chẳng hạn ta có thể tham khảo một số sự mở rộng trong các công trình (Cabrera & Volodin, 2005; Sung, 2013; Thanh, 2005).

Năm 2006, Terán và Molchanov (Terán & Molchanov, 2006) đưa ra khái niệm không gian tổ hợp lồi, đó là không gian metric được trang bị phép toán tổ hợp lồi. Cũng trong (Terán & Molchanov, 2006; Terán & Molchanov, 2006), Terán và Molchanov đã chứng minh luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên và các biến ngẫu nhiên mờ độc lập đôi một cùng phân phối (viết tắt: p.i.i.d) trong không gian tổ hợp lồi.

Gần đây, trong (Quang & Nguyen, 2015) tác giả đã chứng minh một số kết quả về sự hội tụ trung bình của mảng kép các biến ngẫu nhiên mờ trong không gian tổ hợp lồi với các trường hợp có hoặc không có điều kiện compact khả tích đều. Tiếp nối hướng nghiên cứu trên, trong bài báo này ta thiết lập kết quả về sự hội tụ trung bình của mảng kép các biến ngẫu nhiên và các biến ngẫu nhiên mờ p.i.i.d trong không gian tổ hợp lồi.

2. NỘI DUNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Nội dung nghiên cứu: Nghiên cứu và thiết lập các định lý về sự hội tụ theo trung bình của mảng kép các biến ngẫu nhiên và các biến ngẫu nhiên mờ p.i.i.d trong không gian tổ hợp lồi.

- Đối tượng nghiên cứu: Sự hội tụ theo trung bình dạng nhiều chiều.

- Phạm vi nghiên cứu: Các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất.

- Phương pháp nghiên cứu: Sử dụng phối hợp các phương pháp nghiên cứu lý thuyết thuộc các chuyên ngành xác suất và giải tích.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Để thuận tiện cho việc trình bày kết quả chính của bài báo, ta nhắc lại một số khái niệm về không gian tổ hợp lồi và biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian tổ hợp lồi (chi tiết xem trong (Terán & Molchanov, 2006; Terán & Molchanov, 2006)).

Cho $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ. Với $A \in \mathscr{A}$, ký hiệu $I\{A\}$ là hàm chỉ tiêu của A và (Ξ, d) là không gian metric đầy đủ và khả ly. Trang bị trên Ξ một phép toán tổ hợp lồi như sau: Với $n \geq 2$ các số $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} \ddot{e}_i = 1$ và $\forall u_1, ..., u_n \in \Xi$, phép toán tổ hợp lồi cho kết quả là một phần tử của Ξ ký hiệu là $\left[\lambda_i, u_i\right]_{i=1}^{n}$ hoặc $[\lambda_1, u_1; ...; \lambda_n, u_n]$. Giả thiết rằng $[1, u] = u$ với $\forall u \in \Xi$, đồng thời 5 tiên đề sau được thoả mãn:

- TĐ1 (Tính giao hoán)
$$\left[\lambda_i, u_i\right]_{i=1}^{n} = \left[\lambda_{\sigma(i)}, u_{\sigma(i)}\right]_{i=1}^{n}$$ với mọi hoán vị σ của $\{1, 2, ..., n\}$.
- TĐ2 (Tính kết hợp)
$$\left[\lambda_i, u_i\right]_{i=1}^{n+2} = \left[\lambda_1, u_1; ...; \lambda_n, u_n; \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}, \left[\frac{\lambda_{n+j}}{\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}}, u_{n+j}\right]_{j=1}^{2}\right]$$
- TĐ3 (Tính liên tục) Nếu $u, v \in \Xi$ và $\lambda^{(k)} \to \lambda$ khi $k \to \infty$ thì
$$\left[\lambda^{(k)}, u; 1 - \lambda^{(k)}, v\right] \to \left[\lambda, u; 1 - \lambda, v\right].$$
- TĐ4 (Độ cong âm) Với mọi $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Xi$ và $\lambda \in (0, 1)$ thì

[1] *Trường Đại học Điện lực;*
Tác giả liên hệ: Phạm Trí Nguyễn; ĐT: 0972823080; Email: nguyenpt@epu.edu.vn.

$$d\left(\left[\lambda, u_1; 1-\lambda, u_2\right], \left[\lambda, v_1; 1-\lambda, v_2\right]\right) \le \lambda d\left(u_1, v_1\right) + \left(1-\lambda\right) d\left(u_2, v_2\right).$$

TĐ5 (Sự lồi hóa) Với mỗi $u \in \Xi$, tồn tại $\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}, u\right]_{i=1}^{n}$, giới hạn này được ký hiệu bởi $K_{\Xi}u$ (hoặc Ku nếu không sợ nhầm lẫn) và K được gọi là toán tử lồi hóa.

Không gian metric trang bị phép toán tổ hợp lồi thỏa mãn 5 tiên đề nêu trên được gọi là *không gian tổ hợp lồi*.

Ánh xạ $X : \Omega \to \Xi$ được gọi là *biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên* Ξ ($\Xi -$ giá trị) nếu $X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ với mọi $B \in \mathscr{B}(\Xi)$, trong đó $\mathscr{B}(\Xi)$ là $\sigma -$ đại số Borel trên Ξ. Phân phối xác suất P_X của X cho bởi: $P_X(B) = P\left\{X^{-1}(B)\right\}$, $\forall B \in \mathscr{B}(\Xi)$. Hai biến ngẫu nhiên $\Xi -$ giá trị X, Y gọi là *cùng phân phối* nếu $P_X = P_Y$.

Họ biến ngẫu nhiên $\Xi -$ giá trị $\left\{X_i : i \in \Lambda\right\}$ (Λ là tập chỉ số) gọi là độc lập đôi một nếu họ các $\sigma -$ đại số $\left\{\sigma(X_i) : i \in \Lambda\right\}$ là độc lập đôi một, ở đây $\sigma(X_i) = \left\{X_i^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\Xi)\right\}$.

Cố định $u_0 \in K(\Xi)$, biến ngẫu nhiên $\Xi -$ giá trị X được gọi là *khả tích* nếu $Ed(u_0, X) < +\infty$. Tập hợp các biến ngẫu nhiên khả tích trên Ξ ký hiệu là L(Ξ). Giả sử X là biến ngẫu nhiên đơn giản nhận các giá trị $x_i \in \Xi$ tương ứng trên các tập Ω_i ($i = 1,\ldots, n$). Khi đó kỳ vọng của X được định nghĩa bởi $EX = \left[P(\Omega_i), Kx_i\right]_{i=1}^{n}$. Nếu $X \in$ L(Ξ), tồn tại dãy các biến ngẫu nhiên đơn giản hội tụ đến X. Khi đó EX được định nghĩa là giới hạn của dãy các kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên đơn giản. Ta có $d(EX;EY) \le Ed(X;Y), \forall X, Y \in$ L(Ξ).

Ký hiệu $c(\Xi)$ là tập hợp tất cả các tập con compact khác rỗng của Ξ. Định lý 6.2 (Terán & Molchanov, 2006) chỉ ra rằng nếu Ξ là không gian tổ hợp lồi, thì $c(\Xi)$ cùng với metric Hausdorff d_H cũng là không gian tổ hợp lồi. Do $(c(\Xi), d_H)$ là không gian metric đầy đủ và khả ly, nên các khái niệm và tính chất về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên khả tích $c(\Xi)$ – giá trị cũng tương tự như biến ngẫu nhiên khả tích $\Xi -$ giá trị. Nếu $X \in$ L($c(\Xi)$), thì ta ký hiệu kỳ vọng của X là $E_{c(\Xi)}X$.

Định nghĩa 3.1. Mảng kép $\left\{X_{mn} : m, n \ge 1\right\}$ các biến ngẫu nhiên thực được gọi là *khả tích đều* nếu

$$\sup_{m,n\ge 1} E\left|X_{mn}\right| I\left\{\left|X_{mn}\right| > a\right\} \to 0 \text{ khi } a \to +\infty.$$

Nhận xét 3.2. Nếu $\left\{X_{mn} : m, n \ge 1\right\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên thực khả tích cùng phân phối thì do

$$\sup_{m,n\ge 1} E\left|X_{mn}\right| I\left\{\left|X_{mn}\right| > a\right\} = E\left|X_{11}\right| I\left\{\left|X_{11}\right| > a\right\} \to 0 \text{ khi } a \to +\infty,$$

nên nó là khả tích đều.

Với $x \in \Xi$ và $a, b \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu $\|x\|_{u_0} := d(x; u_0)$, $a \vee b = \max\left\{a, b\right\}$.

Bổ đề 3.3. *Giả sử* $\left\{X_{mn} : m, n \ge 1\right\}$ *là mảng kép các biến ngẫu nhiên thực khả tích* và p.i.i.d. *Khi đó ta thu được sự hội tụ theo trung bình*

$$E\left|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} - EX_{11}\right| \to 0 \qquad (1)$$

khi $m \vee n \to +\infty$.

Chứng minh. Theo Nhận xét 3.2, ta có $\left\{X_{mn} : m, n \ge 1\right\}$ là khả tích đều. Mặt khác, ta biết rằng trong không gian hữu hạn chiều thì điều kiện khả tích đều tương đương với điều kiện compact khả tích đều. Do đó, áp dụng Bổ đề 3.3 (Nguyen, 2022) (trường hợp $r = 1$) ta thu được kết quả (1).

Định lý 3.4. *Giả sử* $\left\{X_{mn} : m, n \ge 1\right\}$ *là mảng kép các biến ngẫu nhiên* $\Xi -$ *giá trị khả tích và p.i.i.d. Khi đó ta thu được sự hội tụ theo trung bình*

$$Ed\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, EX_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right) \to 0 \ (2) \text{ khi } m \vee n \to +\infty.$$

Chứng minh. Ta xét 2 trường hợp sau

TH1: Giả sử X_{11} là biến ngẫu nhiên đơn giản nhận các giá trị $u_1, \ldots, u_p$ trên Ξ.

Theo bất đẳng thức tam giác và sử dụng giả thiết cùng phân phối ta có

$$\begin{aligned} &d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, EX_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right) \\ &\le d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, KX_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right) \\ &+ d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, KX_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, EX_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right) \\ &:= (T_1) + (T_2). \qquad (3) \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta đánh giá (T_1) và (T_2). Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Bổ đề 3.3 (Nguyen, 2022), với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, mọi $\omega \in \Omega$ và $m \vee n$ đủ lớn, thì

$$(T_1) < \varepsilon \Rightarrow E(T_1) < \varepsilon. \qquad (4)$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.1 [9] và Bổ đề 3.3 [7]

$$(T_2) = d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, \left[I\left\{X_{ij} = u_t\right\}, Ku_t\right]_{t=1}^{p}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, \left[P\left\{X_{ij} = u_t\right\}, Ku_t\right]_{t=1}^{p}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)$$

$$\leq \sum_{t=1}^{p} \left| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(I\left\{X_{ij} = u_t\right\} - P\left\{X_{ij} = u_t\right\} \right) \right| \|u_t\|_{u_0}$$

$$\leq C \sum_{t=1}^{p} \left| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(I\left\{X_{ij} = u_t\right\} - P\left\{X_{ij} = u_t\right\} \right) \right|,$$

với $C = \max\left\{\|u_t\|_{u_0} : 1 \leq t \leq p\right\}$. Áp dụng Bổ đề 3.3 cho mảng kép các biến ngẫu nhiên thực $\left\{I\left\{X_{ij} = u_t\right\} - P\left\{X_{ij} = u_t\right\} : i, j \geq 1\right\}$ p.i.i.d ta suy ra với mỗi $t = 1, \ldots, p$ và $m \vee n \to +\infty$, thì

$$E\left| \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(I\left\{X_{ij} = u_t\right\} - P\left\{X_{ij} = u_t\right\} \right) \right| \to 0.$$

Do đó: $E(T_2) \to 0$ khi $m \vee n \to +\infty$. (5)

Kết hợp (3), (4), (5) và với $m \vee n \to +\infty$ ta nhận được (2).

TH2: Xét trường hợp tổng quát khi X_{11} là biến ngẫu nhiên khả tích bất kỳ.

Với mỗi $\varepsilon > 0$, theo Mệnh đề 4.1(d) (Terán, & Molchanov, 2006), tồn tại $k \geq 1$ sao cho $Ed\left(\varphi_k(X_{11}), X_{11}\right) < \varepsilon$. Bởi bất đẳng thức tam giác ta có

$$d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, X_{ij} \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, EX_{11} \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right)$$

$$\leq d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, X_{ij} \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, \varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right)$$

$$+ d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, \varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, E\varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right)$$

$$+ d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, E\varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, EX_{11} \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right). \quad (6)$$

Vì $\left\{\varphi_k(X_{mn}) : m, n \geq 1\right\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên đơn giản p.i.i.d, nên theo TH1 ta có

$$Ed\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, \varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, E\varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right)$$

$\to 0$ (7) khi $m \vee n \to +\infty$.

Tương tự, do $\left\{d(X_{mn}, \varphi_k(X_{mn})) : m, n \geq 1\right\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên thực p.i.i.d, nên

$$Ed\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, X_{ij} \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, \varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right)$$

$$\leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Ed(X_{11}, \varphi_k(X_{11})) < \varepsilon, \quad (8)$$

$$d\left(\left[m^{-1}, \left[n^{-1}, E\varphi_k(X_{ij}) \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m}, \left[m^{-1}, \left[n^{-1}, EX_{11} \right]_{j=1}^{n} \right]_{i=1}^{m} \right)$$

$$\leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Ed(X_{11}, \varphi_k(X_{11})) < \varepsilon. \quad (9)$$

Từ (6), (7), (8) và (9) ta suy ra (2).

Tiếp theo, ta thiết lập sự hội tụ theo trung bình cho mảng kép các biến ngẫu nhiên mờ trong không gian tổ hợp lồi. Trước hết ta trình bày một số ký hiệu và khái niệm liên quan (chi tiết xem trong (Li et al., 2022; Terán & Molchanov, 2006)).

Ký hiệu $\|A\|_{\{u_0\}} := d_H(A; \{u_0\})$, $A \in c(\Xi)$.

Ánh xạ $v : \Xi \to [0;1]$ được gọi là tập mờ trên Ξ. Ký hiệu $F(\Xi)$ là không gian tất cả các tập mờ v thỏa mãn 3 điều kiện sau:

(i) v là nửa liên tục trên,

(ii) v là chuẩn tắc, nghĩa là $\sup v = 1$,

(iii) $\operatorname{supp} v = \overline{\{x \in \Xi : v(x) > 0\}}$ là tập compact trong Ξ.

Cho $v \in F(\Xi)$ và $\alpha \in (0;1]$, tập $\alpha-$mức của v được ký hiệu bởi $L_\alpha v = \{x \in \Xi : v(x) \geq \alpha\}$. Do $v \in F(\Xi)$ nên $L_\alpha v \in c(\Xi)$ với mọi $\alpha \in (0;1]$. Chú ý rằng, từ điều kiện (ii) kéo theo $L_1 v = \{x \in \Xi : v(x) = 1\} \neq \varnothing$. Ngoài ra ta còn ký hiệu $L_\alpha^+ v = \{x \in \Xi : v(x) > \alpha\}$ với $\alpha \in (0;1]$.

Định lý 3 (Terán & Molchanov, 2006) chỉ ra rằng nếu Ξ là không gian tổ hợp lồi thì $F(\Xi)$ với phép toán tổ hợp lồi cho bởi

$$L_\alpha\left(\left[\lambda_i, v_i \right]_{i=1}^{n} \right) = \left[\lambda_i, L_\alpha v_i \right]_{i=1}^{n}, \quad \alpha \in (0;1],$$

và metric $d_\infty(v_1, v_2) = \sup_{\alpha \in (0,1]} d_H(L_\alpha v_1, L_\alpha v_2)$, cũng là không gian tổ hợp lồi, với toán tử lồi hoá $K_{F(\Xi)}$ xác định bởi

$L_\alpha\left(K_{F(\Xi)} v\right) = K_{c(\Xi)} L_\alpha v = \overline{\mathrm{co}} K_\Xi(L_\alpha v)$, $\alpha \in (0;1]$. Trong đó ký hiệu $\overline{\mathrm{co}} A$ là bao lồi đóng của tập A.

Ánh xạ $X : \Omega \to F(\Xi)$ gọi là biến ngẫu nhiên mờ nếu $L_\alpha(X)$ là biến ngẫu nhiên $c(\Xi)-$giá trị với mọi $\alpha \in (0;1]$. Biến ngẫu nhiên mờ X gọi là khả tích bị chặn nếu $\left\| L_0^+ X \right\|_{\{u_0\}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, khi đó ta ký hiệu $X \in \mathcal{L}\left(F(\Xi)\right)$. Ký hiệu kỳ vọng của $X \in \mathcal{L}\left(F(\Xi)\right)$ là $E_{F(\Xi)}X$. Theo (Terán & Molchanov, 2006), $E_{F(\Xi)}X$ là tập mờ trên Ξ thỏa mãn: $L_\alpha\left(E_{F(\Xi)}X\right) = E_{c(\Xi)}\left(L_\alpha X\right), \alpha \in (0;1]$.

Mảng kép $\left\{X_{mn} : m, n \geq 1\right\}$ các biến ngẫu nhiên mờ gọi là độc lập đôi một nếu mảng kép $\left\{L_\alpha X_{m,n} : m, n \geq 1\right\}$ là độc lập đôi một với mọi $\alpha \in (0;1]$.

Mệnh đề 3.5. ((Quang & Nguyen, 2015), Mệnh đề 3.1) *Cho* $\alpha \in [0;1)$

(a) $L_\alpha^+\left(\left[\lambda_i, v_i\right]_{i=1}^n\right) = \left[\lambda_i, L_\alpha^+ v_i\right]_{i=1}^n$ *với* $v_i \in F(\Xi)$,

(b) $L_\alpha^+\left(E_{F(\Xi)}X\right) = E_{c(\Xi)}\left(L_\alpha^+ X\right)$ *với* $X \in \mathcal{L}\left(F(\Xi)\right)$.

Bổ đề 3.6. ((Quang & Nguyen, 2015), Bổ đề 3.4) *Giả sử* $v \in F(\Xi)$. *Khi đó với mỗi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại phân hoạch hữu hạn* $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p = 1$ *của* $[0;1]$ *sao cho*

$$\max_{1 \leq k \leq p} d_H\left(L_{\alpha_{k-1}}^+ v, L_{\alpha_k} v\right) < \varepsilon. \qquad (10)$$

Định lý 3.7. *Giả sử* $\left\{X_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\right\}$ *là mảng kép các biến ngẫu nhiên mờ p.i.i.d trong không gian tổ hợp lồi* Ξ. *Khi đó ta thu được sự hội tụ theo trung bình*

$$Ed_\infty\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{F(\Xi)}X_{11}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right) \to 0 \quad (11)$$

khi $m \vee n \to \infty$.

Chứng minh. Với mỗi $\varepsilon > 0$, theo (10) thì

$$\max_{1 \leq k \leq p} d_H\left(L_{\alpha_{k-1}}^+ E_{F(\Xi)}X_{11}, L_{\alpha_k} E_{F(\Xi)}X_{11}\right) < \varepsilon. \quad (12)$$

Ta có đánh giá

$$\sup_{\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k} d_H\left(L_\alpha\left[m^{-1},\left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, L_\alpha\left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{F(\Xi)}X_{11}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$\leq d_H\left(L_{\alpha_k}\left[m^{-1},\left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, L_{\alpha_{k-1}}^+\left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{F(\Xi)}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$+d_H\left(L_{\alpha_{k-1}}^+\left[m^{-1},\left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, L_{\alpha_k}\left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{F(\Xi)}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$= d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$+d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$\leq d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$+d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$+2d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$\leq d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{11}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$+d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{c(\Xi)}L_{\alpha_{k-1}}^+ X_{11}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right) + 2\varepsilon. \quad (13)$$

Từ (13) ta suy ra

$$Ed_\infty\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m, \left[m^{-1},\left[n^{-1}, E_{F(\Xi)}X_{11}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m\right)$$

$$= E\left[\max_{1 \leq k \leq p} \sup_{\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k} d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1}, X_{ij}\right]_{j=1}^n\right]_{i=1}^m,\right.\right.$$

$$L_{\alpha}\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathsf{F}(\Xi)}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\Bigg)\Bigg]$$

$$\leq E\left[\max_{1\leq k\leq p} d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1},L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m},\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathrm{c}(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)\right]$$

$$+E\left[\max_{1\leq k\leq p} d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1},L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m},\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathrm{c}(\Xi)}L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)\right]+2\varepsilon$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p}E\left[d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1},L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m},\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathrm{c}(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{p}E\left[d_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1},L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m},\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathrm{c}(\Xi)}L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)\right]+2\varepsilon. \quad (14)$$

Với $k=1,\ldots p$, áp dụng Định lý 3.4 cho hai mảng kép các biến ngẫu nhiên $c(\Xi)$ − giá trị $\left\{L_{\alpha_k}X_{mn}: m,n\geq 1\right\}$ và $\left\{L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{mn}: m,n\geq 1\right\}$

$$Ed_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1},L_{\alpha_k}X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m},\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathrm{c}(\Xi)}L_{\alpha_k}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)$$

$\rightarrow 0$ (15) khi $m\vee n\rightarrow+\infty$,

$$Ed_H\left(\left[m^{-1},\left[n^{-1},L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{ij}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m},\left[m^{-1},\left[n^{-1},E_{\mathrm{c}(\Xi)}L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{11}\right]_{j=1}^{n}\right]_{i=1}^{m}\right)$$

$\rightarrow 0$ (16) khi $m\vee n\rightarrow+\infty$.

Từ (14), (15) và (16) ta thu được (11).

4. KẾT LUẬN

Kết quả chính của bài báo là hai định lý 3.4 và 3.7, thiết lập sự hội tụ theo trung bình của mảng kép các biến ngẫu nhiên và các biến ngẫu nhiên mờ p.i.i.d trong không gian tổ hợp lồi. Trong đó, Định lý 3.4 mở rộng Định lý 10.1 (Gut, 2005) từ trường hợp dãy các biến ngẫu nhiên thực p.i.i.d sang trường hợp mảng kép các biến ngẫu nhiên p.i.i.d trong không gian tổ hợp lồi. Nhân đây, tác giả xin được cảm ơn sự tài trợ của Trường Đại học Điện lực cho nghiên cứu này với mã số: ĐTKHCN.04/2022.

MEAN CONVERGENCE FOR DOUBLE ARRAY OF PAIRWISE INDEPENDENT AND IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES AND FUZZY RANDOM VARIABLES IN CONVEX COMBINATION SPACES

Pham Tri Nguyen[1]

Received Date: 21/06/2023; Revised Date: 06/12/2023; Accepted for Publication: 10/12/2023

ABSTRACT

In this paper, let (Ξ, d) be a metric space, which is endowed with a convex combination operation and called convex combination space as defined by Terán and Molchanov in 2006. We establish the mean convergence for double array of pairwise independent and identically distributed random variables and fuzzy random variables in convex conbination space.

Keywords: *Mean convergence; Pairwise independent and identically distributed; Convex combination space.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Cabrera, M.O. & Volodin, A. (2005). Mean convergence theorems and weak laws of large numbers for weighted sums of random variables under a condition of weighted integrability, J. Math. Anal. Appl., 305, 644-658.

Chen, P. and Wang, D. (2012). convergence for B-valued random elements, Acta Math. Sinica, English Series, 28, 857-868.

Gut, A. (2005). Probability: A Graduate Course, Springer.

Li, S., Ogura, Y. and Kreinovich, V. (2002). Limit theorems and applications of set-valued and fuzzy set-valued random variables, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Nguyen, P.T. (2022). Mean convergence theorems for double array of fuzzy random variables in metric spaces, Nonlinear Functional Analysis and Applications, 27 (3), 621-640.

Quang, N.V. and Nguyen, P.T. (2015). Some strong laws of large number for double array of random upper semicontinuous functions in convex combination spaces, Statistics and Probability Letters, 96, 85-94.

Quang, N.V. and Thuan, N.T. (2012). On the strong laws of large number for double arrays of random variables in convex combination spaces, Acta Math. Hungar., 34, 543-564.

Sung, S.H. (2013). Convergence in r-mean of weighted sums of NQD random variables, Applied Mathematics Letters, 26, 18-24.

Terán, P. and Molchanov, I. (2006). The law of large numbers in a metric space with a convex combination operation, J. Theoret. Probab., 19 (4), 875-898.

Terán, P. and Molchanov, I. (2006). A general law of large numbers, with applications, Advances in Soft Computing, 6, 153-160.

Thanh, L.V. (2005). Strong law of large numbers and convergence for double arrays of independent random variables, Acta mathematica Vietnamica, 30 (3), 225-232.

[1]*Electric Power University;*

Corresponding author: Pham Tri Nguyen; Tel: 0972823080; Email: nguyenpt@epu.edu.vn