

ĐỊNH LÝ KIỂU LÀM TRỘI CHO HÀM $h - A_i G_h -$ LỖI VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

Nguyễn Thị Ngọc Bích¹, Mai Quốc Vũ¹

Ngày nhận bài: 28/10/2025; Ngày phản biện thông qua: 21/11/2025; Ngày duyệt đăng: 01/01/2026

TÓM TẮT

Bài báo này chỉ ra đặc trưng thứ hai của Định lý làm trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya vẫn còn đúng cho lớp hàm $h - A_i G_h -$ lỗi. Áp dụng của kết quả này, chúng tôi mở rộng một số bất đẳng thức nổi tiếng cho các hàm lỗi suy rộng thuộc lớp hàm $h - A_i G_h -$ lỗi.

Từ khóa: làm trội, Định lý làm trội, hàm $h - A_i G_h -$ lỗi, bất đẳng thức Karamata.

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết làm trội đóng vai trò quan trọng và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Lý thuyết này đã được sử dụng rộng rãi từ đầu thế kỉ XX bởi các nhà kinh tế học. Đầu tiên phải kể đến đóng góp của Lorenz (Marshall, A. W., Olkin, I., 1981) vào năm 1905 khi công bố đường cong nổi tiếng có tên gọi là *đường cong Lorenz*. Năm 1920 Dalton (Marshall, A. W., Olkin, I., 1981) đã đưa ra quan điểm khác mà sau này được gọi là *nguyên lý chuyển giao*. Tuy nhiên, đến năm 1934 khái niệm làm trội mới được Hardy, Littlewood và Pólya (Hardy et al., 1934) định nghĩa một cách chặt chẽ về mặt toán học. Sau đó, lý thuyết này đã được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực. Trong toán học, lý thuyết làm trội là công cụ mạnh để nghiên cứu bất đẳng thức, giải tích lỗi, và đại số tuyến tính. Trong lý thuyết xác suất, lý thuyết làm trội mở rộng thành làm trội ngẫu nhiên, đồng thời giúp nghiên cứu các hàm phân phối. Trong thống kê, lý thuyết làm trội được ứng dụng trong phân tích thống kê đa biến hay lấy mẫu. Trong lý thuyết thông tin, lý thuyết làm trội được sử dụng trong đo bất định hay entropy (hàm entropy Shannon hay entropy của phân phối Multinomial cũng được nghiên cứu thông qua tính chất hàm Schur-lõm),... (Marshall and Olkin, 1981).

Với mỗi vectơ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta kí hiệu $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ là vectơ nhận được từ x bằng cách sắp xếp lại các thành phần tọa độ của nó theo thứ tự giảm dần. Khi đó, với hai vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta nói y trội hơn x , kí hiệu $x \prec y$, nếu $\sum_{i=1}^k x_i^* \leq \sum_{i=1}^k y_i^*$, $k = 1, \dots, n$, với đẳng thức xảy ra khi $k = n$. Quan hệ này được đặc trưng bởi Định lý làm trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya như sau.

Định lý 1.1 (Day, 1973). *Các khẳng định sau đây là tương đương đối với $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

(1) $x \prec y$.

(2) $\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \sum_{i=1}^n f(y_i)$ với mọi hàm lồi liên tục

f xác định trên \mathbb{R} .

(3) x thuộc bao lồi của tập $\{z : z^* = y^*\}$.

(4) Tồn tại ma trận ngẫu nhiên kép C sao cho $x = Cy$.

Nhắc lại rằng một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận ngẫu nhiên kép* nếu các phần tử của nó không âm và tổng các phần tử trong mỗi dòng và mỗi cột đều bằng 1.

Định lý 1.1 là một trong những định lý quan trọng nhất của lý thuyết làm trội. Đặc trưng thứ hai của Định lý 1.1 chỉ ra tính chất giải tích của làm trội, còn được gọi là bất đẳng thức trội. Đặc trưng thứ ba thể hiện đặc trưng hình học của làm trội. Đặc trưng thứ tư khẳng định mỗi thành phần tọa độ của vectơ x là trung bình có trọng của các thành phần tọa độ của vectơ y (x thuộc bao lồi của tập $\{z : z^* = y^*\}$). Đây chính là một trong những đặc trưng hình học quan trọng của lý thuyết làm trội (Marshall and Olkin, 1981).

Do lý thuyết làm trội có vai trò quan trọng nên Định lý 1.1 đã được xem xét mở rộng cho nhiều trường hợp khác nhau dựa trên tính lồi suy rộng. Niculescu và Roventa đã sử dụng đặc trưng thứ 4 trong Định lý 1.1 để mở rộng khái niệm làm trội đến tính lồi suy rộng rất tổng quát (hàm (M, M_φ) -lồi) và đã thu được bất đẳng thức cho đặc trưng hai của Định lý 1.1 (Niculescu and Roventa, 2017). Tuy nhiên, do đặc điểm của lớp hàm lồi suy rộng được xét, công trình chỉ thu được điều kiện đủ mà không phải điều kiện cần cho đặc trưng này (Huy, 2018).

Hàm $h - MN -$ lỗi được giới thiệu bởi Alomari (Alomari, 2019). Đây là lớp hàm khá tổng quát, đó là sự kết hợp của hàm $h -$ lỗi và hàm $MN -$ lỗi. Do đó việc nghiên cứu lớp hàm này mang lại nhiều kết quả ý nghĩa. Cũng theo tác giả Alomari (Alomari, 2021) lớp hàm $h - MN -$ lỗi được phân

¹Khoa Khoa học Tự nhiên & Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;
Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Ngọc Bích; Email: ntnbich@ttn.edu.vn.

ra nhiều trường hợp dựa vào đặc điểm của các hàm trung bình M, N . Một trong các hàm $h - MN$ - lồi có thể kể đến đó là hàm $h - A_t G_h -$ lồi.

Mục tiêu chính của chúng tôi trong bài báo này là mở rộng đặc trưng thứ hai của Định lý làm trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya (Định lý 1.1) cho lớp hàm $h - A_t G_h -$ lồi được giới thiệu bởi Alomari (Alomari, 2021). Trong bài báo, chúng tôi chỉ ra đặc trưng hai là điều kiện cần và đủ cho trội hóa đối với lớp hàm này. Nói riêng, kết quả này cũng chính là một mở rộng của bất đẳng thức Karamata cho lớp hàm $h - A_t G_h -$ lồi. Sau đó, chúng tôi chỉ ra một số bất đẳng thức nổi tiếng khác đối với hàm lồi vẫn còn đúng cho lớp hàm $h - A_t G_h -$ lồi.

2. NỘI DUNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Nội dung nghiên cứu

Nội dung nghiên cứu của bài báo thuộc về lĩnh vực giải tích lồi và bất đẳng thức. Cụ thể hơn, vấn đề nghiên cứu của bài báo tập trung chủ yếu vào lý thuyết làm trội gắn liền với hàm $h - A_t G_h -$ lồi và bất đẳng thức. Dựa vào kết quả Định lý 2.2 (Huy et al., 2024), bài báo đã đưa ra một làm mịn của Định lý 3.1.5 (Alomari, 2019). Sau đó áp dụng kết quả vừa tìm được để đưa ra Định lý kiểu làm trội cho hàm $h - A_t G_h -$ lồi.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Bên cạnh việc sử dụng phương pháp đặc biệt hóa và khái quát hóa để có được cái nhìn tổng quan về vấn đề nghiên cứu, chúng tôi còn sử dụng đặc trưng hình học của trội hóa. Hơn nữa, chúng tôi kết hợp đặc trưng này với đặc trưng giải tích của lớp hàm $h - A_t G_h -$ lồi để nhận được kết quả mới cho Định lý kiểu làm trội.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

3.1. Bất đẳng thức kiểu Jensen cho lớp hàm $h - A_t G_h -$ lồi

Sau đây, ta luôn giả thiết I, J là các khoảng trong \mathbb{R} , sao cho $(0,1) \subset I, [a,b] \subset J$ và $D \subset \mathbb{R}^n$. **Định nghĩa 3.1.1** (Alomari, 2021). Giả sử $h: I \rightarrow (0, \infty)$ là một hàm không âm. Định nghĩa hàm $M: [0,1] \rightarrow [a,b]$ xác định bởi $M(t) = M(t; a, b)$ trong đó $M(t; a, b)$ là một trong các hàm sau

(i) $A_h(a, b) = h(1-t)a + h(t)b$ được gọi là trung bình số học.

(ii) $G_h(a, b) = a^{h(1-t)} b^{h(t)}$ được gọi là trung bình hình học.

Với $h(t) = t$ thì $A_t(a, b) = (1-t)a + tb$.

Bây giờ ta nhắc lại định nghĩa hàm $h - A_t G_h -$ lồi theo Alomari (Alomari, 2021) trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.2 (Alomari, 2021). Giả sử $h: I \rightarrow (0, \infty)$ là một hàm không âm cho trước, $A_t: [0,1] \rightarrow [a,b]$, $G_h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ là các hàm trung bình. Hàm $f: D \rightarrow (0, \infty)$ được gọi là hàm $h - A_t G_h -$ lồi nếu bất đẳng thức

$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq [f(x_1)]^{h(t)} \cdot [f(x_2)]^{h(1-t)}$, đúng với mọi $x_1, x_2 \in D$ và với mọi $t \in [0,1]$.

Một đặc trưng quan trọng của lớp hàm $h - A_t G_h -$ lồi là bất đẳng thức kiểu Jensen. Tuy nhiên, để có kết quả này, ta cần khái niệm hàm siêu nhân tính sau đây.

Định nghĩa 3.1.3 (Niculescu and Persson, 2006). Hàm $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là siêu nhân tính nếu $h(xy) \geq h(x)h(y)$, với mọi $x, y \in I$.

Định nghĩa 3.1.4 (Niculescu and Persson, 2006). Hàm $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là cộng tính nếu $h(x) + h(y) = h(xy)$, với mọi $x, y \in I$.

Định lý 3.1.5 (Alomari, 2019) Giả sử w_1, w_2, \dots, w_n là các số thực dương ($n \geq 2$)

và $W_n = \sum_{i=1}^n w_i$. Nếu h là hàm siêu nhân tính không âm và f là $h - A_t G_h -$ lồi trên D thì với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ ta có bất đẳng thức

$$f\left(\frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i x_i\right) \leq \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)}. \quad (3.1)$$

Trong Định lý 3.1.5, đặt $\alpha_i = \frac{w_i}{W_n}, i = \overline{1, n}$. thì

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall i = \overline{1, n}. \text{ Khi đó, bất đẳng}$$

thức (3.1) trở thành

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(\alpha_i)}.$$

Định lý sau đây cung cấp một làm mịn của **Định lý 3.1.5**.

Định lý 3.1.6. Cho vector x có các thành phần không âm thuộc D là một tập con lồi của \mathbb{R}^n . Giả sử $h: (0,1) \rightarrow (0, \infty)$ là hàm siêu nhân tính.

Nếu hàm $f: D \rightarrow (0, \infty)$ là hàm $h - A_t G_h -$ lồi, dương trên D thì với mọi $x_i \in D, \alpha_i > 0, \forall i = \overline{1, n}$,

$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}$ ta có bất đẳng thức

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \left(\frac{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)}{\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{\frac{1}{n}}}\right)^{nh(\alpha_{\min})} \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(\alpha_i)} \leq \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(\alpha_i)}.$$

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức đầu. Áp dụng Định lý 2.2 (Huy et al., 2024) ta được

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n h(\alpha_i) f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \\ & \geq nh(\alpha_{\min}) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \right) \end{aligned}$$

Vì f là hàm $h - A_i G_h$ -lồi nên $\ln \circ f$ là hàm h -lồi. Do đó $\ln \circ f$ là hàm lồi. Suy ra

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n h(\alpha_i) (\ln \circ f)(x_i) - (\ln \circ f)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \\ & \geq nh(\alpha_{\min}) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (\ln \circ f)(x_i) - (\ln \circ f)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \right) \\ & \ln \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(\alpha_i)} - \ln \left[f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \right] \geq nh(\alpha_{\min}) \\ & \left(\ln \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{\frac{1}{n}} - \ln f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \right) \\ & \ln \frac{\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(\alpha_i)}}{\left[f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \right]} \geq nh(\alpha_{\min}) \ln \frac{\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{\frac{1}{n}}}{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)} \\ & \frac{\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(\alpha_i)}}{\left[f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \right]} \geq \frac{\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{nh(\alpha_{\min}) \frac{1}{n}}}{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^{nh(\alpha_{\min})}} \end{aligned}$$

Bởi tính dương của hàm f ta suy ra bất đẳng thức

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \frac{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^{nh(\alpha_{\min})}}{\left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}}}$$

Vậy bất đẳng thức đầu được chứng minh xong. Bất đẳng thức thứ hai được suy trực tiếp từ tính dương của hàm f và bất đẳng thức kiểu Jensen cho hàm $h - A_i G_h$ lồi. Thật vậy, theo Nhận xét 2.1 trong (Huy et al., 2024), ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) - \ln f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ & \geq \frac{h(n\alpha_{\min})}{nh(\alpha_{\min})} \left(h\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) - \ln f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \right) \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này kéo theo

$$\left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

và kết hợp với tính dương của hàm f và h , ta suy ra

$$1 \geq \frac{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^{nh(\alpha_{\min})}}{\left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right)^{\frac{1}{n}}}$$

Vậy định lý được chứng minh xong.

3.2. Định lý kiểu làm trội cho hàm $h - A_i G_h$ -lồi

Áp dụng Bất đẳng thức Jensen cho hàm $h - A_i G_h$ -lồi ta thu được định lý sau

Định lý 3.2.1. Cho $C = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận ngẫu nhiên kép và các véc-tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ thỏa mãn điều kiện $y = Cx$, Đặt $a_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$. Giả sử $h : (0,1) \rightarrow (0, \infty)$ là hàm lồi, siêu nhân tính, cộng tính và $f : D \rightarrow (0, \infty)$ là hàm $h - A_i G_h$ -lồi, dương trên D , trong đó D là khoảng chứa các thành phần của véc-tơ x và véc-tơ y . Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^n f(y_i) \leq A^{\sum_{i=1}^n nh(a_i)} \prod_{j=1}^n [f(x_j)]^{h(1)},$$

trong đó $A = \frac{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)}{\left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}}}$.

Chứng minh. Vì $y = Ax$ nên $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, trong đó $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, với mọi $i, j = 1, \dots, n$.

Áp dụng Định lý 3.1.6 cho hàm f ta được

$$\begin{aligned} f(y_i) &= f\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) \leq \frac{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^{nh(a_i)}}{\left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}}} \\ & \times \prod_{j=1}^n [f(x_j)]^{h(a_{ij})}, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Đặt $A = \frac{f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)}{\left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}}}$. Nhân n bất đẳng thức

(3.2) lại với nhau và sử dụng tính cộng tính của h ta được

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n f(y_i) & \leq \prod_{i=1}^n (A)^{nh(a_i)} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n [f(x_j)]^{h(a_{ij})} \\ & \leq A^{\sum_{i=1}^n nh(a_i)} \prod_{j=1}^n [f(x_j)]^{\sum_{i=1}^n h(a_{ij})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{nh(a_i)} \prod_{j=1}^n [f(x_j)]^{h\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right)} \\
 &= A \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{nh(a_i)} [f(x_j)]^{h(1)}.
 \end{aligned}$$

3.3. Một số ứng dụng của Định lý kiểu làm trội

Mục tiêu trước tiên của chúng tôi ở đây là mở rộng bất đẳng thức Popoviciu (Bougoffa, 2006) sau đây

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{n}{n-2} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \\
 \geq \frac{2}{n-2} \sum_{i < j} f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right). \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

với f là hàm lồi xác định trên I và các $x_i \in I$.

Nhận xét 3.3.1. $\forall i$ (3.3) đúng với mọi hàm lồi nên nó cũng đúng với mọi hàm lồi liên tục xác định trên \mathbb{R} . Do đó, theo **Định lý 1.1**, ta có vectơ

$$\begin{aligned}
 x &= (x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n, a, \dots, a) \\
 &\text{(trong đó } a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \text{) trội hơn vectơ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, \frac{x_i + x_k}{2}, \frac{x_i + x_k}{2}, \dots, \right. \\
 &\left. \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right), \forall i \neq k.
 \end{aligned}$$

Chú ý rằng trong vectơ $x = (x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_n, \dots, x_n, a, \dots, a)$ có $n-2$ lần x_1, \dots, x_n và n lần a . Do đó tồn tại ma trận ngẫu nhiên kép C sao cho $y = Cx$. Liên hệ này chứng tỏ rằng

$$y_i = \sum_{j=1}^{n^2-n} a_{ij} x_j \text{ với mọi } i = 1, \dots, n^2 - n.$$

Định lý 3.3.2 (Bất đẳng thức kiểu Popoviciu).

Cho $C = (a_{ij})_{(n^2-n) \times (n^2-n)}$ là ma trận ngẫu nhiên kép và các vectơ x, y được xác định như trong

Nhận xét 3.3.1. thỏa mãn điều kiện $y = Cx$. Với mỗi $i = 1, \dots, n^2 - n$, ta đặt $a_i = \min_{1 \leq j \leq n^2-n} a_{ij}$. Giả sử $h: (0,1) \rightarrow (0,\infty)$ là hàm lồi, siêu nhân tính, cộng tính và $f: D \rightarrow (0,\infty)$ là hàm $h - A_1 G_h -$ lồi, dương trên D , trong đó D chứa các thành phần của vectơ x và vectơ y . Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
 \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left[f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \right]^2 \\
 \leq A \sum_{i=1}^{n^2-n} (n^2-n)^{h(a_i)} \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{(n-2)h(1)} [f(a)]^{nh(1)},
 \end{aligned}$$

trong đó

$$A = \frac{f\left(\frac{1}{n^2-n} \left[(n-2) \sum_{i=1}^n x_i + na \right]\right)}{\left[\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{(n-2)} [f(a)]^n \right]^{\frac{1}{n^2-n}}}.$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } A = \frac{f\left(\frac{1}{n^2-n} \left[(n-2) \sum_{i=1}^n x_i + na \right]\right)}{\left[\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{(n-2)} [f(a)]^n \right]^{\frac{1}{n^2-n}}}.$$

Áp dụng trực tiếp Định lý 3.2.1 cho hai vectơ x và y gồm $n^2 - n$ thành phần tọa độ ta được

$$\begin{aligned}
 &\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left[f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \right] \\
 &\leq A \sum_{i=1}^{n^2-n} (n^2-n)^{h(a_i)} \\
 &\times \underbrace{\prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{h(1)} \dots [f(x_i)]^{h(1)}}_{(n-2)} \underbrace{[f(a)]^{h(1)} \dots [f(a)]^{h(1)}}_n \\
 &\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left[f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \right]^2 \\
 &\leq A \sum_{i=1}^{n^2-n} (n^2-n)^{h(a_i)} \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{(n-2)h(1)} [f(a)]^{nh(1)}.
 \end{aligned}$$

Năm 2006, Bougoffa (Bougoffa, 2006) đã chứng minh bất đẳng thức kiểu Popoviciu suy rộng có dạng

$$(n-1) \sum_{i=1}^n f(y_i) \leq n \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) - f(\bar{x}) \right]. \quad (3.4)$$

trong đó f là hàm lồi bất kỳ, $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

và $y_i = \frac{n\bar{x} - x_i}{n-1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Bất đẳng

thức (3.4) cùng với Định lý 1.1 chứng tỏ rằng bộ $v = (x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n)$ gồm n lần x_i , trội hơn bộ $u = (y_1, \dots, y_1, \dots, y_n, \dots, y_n, \bar{x}, \dots, \bar{x})$, $j = 1, n^2$, gồm $n-1$ lần y_i , và n lần \bar{x} .

Vì vậy, áp dụng trực tiếp Định lý 3.2.1 cho các vectơ $u \prec v$ gồm n^2 thành phần, ta được kết quả sau.

Định lý 3.3.3 (Bất đẳng thức Popoviciu suy rộng). Cho $C = (a_{ij})_{n^2 \times n^2}$ là ma trận ngẫu nhiên kép và các vectơ

$$u = (y_1, \dots, y_1, \dots, y_n, \dots, y_n, \bar{x}, \dots, \bar{x}), \quad j = 1, n^2,$$

gồm $n-1$ lần y_i và n lần \bar{x} và vector $v = (x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n)$ gồm n lần $x_i, i = \overline{1, n}$, thỏa mãn điều kiện $u = Cv$. Với mỗi $i = \overline{1, \dots, n^2}$, ta đặt $a_i = \min_{1 \leq j \leq n^2} a_{ij}$. Giả sử $h: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ là hàm lõm, siêu nhân tính, cộng tính và $f: D \rightarrow (0, \infty)$ là hàm $h - A_i G_h -$ lồi, dương trên D , trong đó D là khoảng chứa các thành phần của vector u và vector v . Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^n [f(y_i)]^{n-1} [f(\bar{x})]^n \leq A^{\sum_{i=1}^n n^2 h(a_i)} \prod_{i=1}^n [f(x_i)]^{nh(1)},$$

trong đó $A = \frac{f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)}{\left[\prod_{i=1}^n f(x_i)\right]^{\frac{1}{n}}}$.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã mở rộng đặc trưng thứ hai của Định lý làm trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya (Định lý 1.1) dựa vào đặc trưng thứ tư của Định lý này cũng như tính chất của hàm $h - A_i G_h -$ lồi. Từ đó một số bất đẳng thức nổi tiếng được thiết lập cho hàm lồi cũng được mở rộng cho lớp hàm $h - A_i G_h -$ lồi. Các kết quả cũng như phương pháp dẫn đến các kết quả trong bài báo là mới có thể được áp dụng để thu được các kết quả tương tự cho lớp hàm lồi suy rộng khác.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Nguyên dưới mã số: T2025-02CB.

MAJORIZATION-TYPE THEOREM FOR $h - A_i G_h -$ CONVEX FUNCTIONS AND SOME APPLICATIONS

Nguyen Thi Ngoc Bich¹, Mai Quoc Vu¹

Received Date: 28/10/2025; Revised Date: 21/11/2025; Accepted for Publication: 01/01/2026

ABSTRACT

In this paper, we show that the famous majorization theorem of Hardy-Littlewood-Pólya still holds true for the class of all $h - A_i G_h -$ convex functions. Using this result, we generalize some well-known inequalities for functions which belongs to this class.

Keywords: Majorization, majorization theorem, $h - A_i G_h -$ convex function, Karamata's inequality.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alomari, M W. (2019). Some properties of h-MN-convexity and Jensen's type inequalities. *Journal of Interdisciplinary Mathematics* 22(8) (2019), 1349–1395.

Alomari, M W. (2021). Popoviciu's type inequalities for h-MN-convex functions. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics*, 48-89.

Bougoffa, L. (2006). New inequalities about convex functions. *J. Inequal. Appl. Math.* 7, no. 4, 6-8.

Day, P. W. (1973). Decreasing rearrangements and doubly stochastic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 178, 383-392.

¹Faculty of Natural Sciences and Technology, Tay Nguyen University;

Corresponding author: Nguyen Thi Ngoc Bich; Email: ntnbich@ttn.edu.vn.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G. (1929). Some simple inequalities satisfied by convex functions. *Messenger Math.* 58, 145-152.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Huy, D. Q. (2018). Mở rộng Định lý trội cho hàm lồi suy rộng và ứng dụng. *Tạp chí Khoa học Đại học Tây Nguyên*, 32.

Huy, D. Q., Gourty A., (2024). Multiple-term improvements of Jensen's inequality for (p,h)-convex and (p,h)-log convex functions, *J. Math. Inequal.* 18, no. 3, 1099-1121.

Niculescu, C. P. and Persson, L. (2006). *Convex functions and their applications*. Springer Science + Business Media.

Niculescu, C.P., Roventa, I. (2017). Hardy-Littlewood-Pólya theorem of majorization in the framework of generalized convexity. *Carpathian J. Math.* 33, no. 1, 87-95.

Marshall, A. W., Olkin, I. (1981). *Inequalities via Majorization—an introduction*. Technical report No. 172, Stanford University, California.