

## MỘT CÁCH TIẾP CẬN MỚI CHO BÀI TOÁN QUY HOẠCH HAI CẤP TOÀN PHƯƠNG TUYẾN TÍNH

Nguyễn Văn Bồng<sup>1</sup>, Lê Bá Thông<sup>1</sup>

Ngày nhận bài: 14/9/2021; Ngày phản biện thông qua: 13/10/2021; Ngày duyệt đăng: 14/10/2021

### TÓM TẮT

Bài toán hai cấp nói chung được biết đến là một lớp bài toán rất khó. Các kết quả hiện nay chỉ có thể giải lớp bài toán này bằng phương pháp xấp xỉ. Trong bài báo này, bằng cách ứng dụng các kết quả của Bổ đề S, thuật toán phân tích hạng một của ma trận và khai thác các tính chất của các ma trận nửa xác định dương, chúng tôi chứng minh rằng bài toán hai cấp toàn phương tuyến tính có thể chuyển được thành bài toán toàn phương một cấp. Vì thế, nghiệm tối ưu của lớp bài toán này có thể được giải một cách chính xác.

**Từ khóa:** Bài toán tối ưu hai cấp, bổ đề S, định lý Farkas, quy hoạch nửa xác định, thuật toán phân tích hạng một.

### 1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu bài toán sau đây, được gọi là bài toán quy hoạch hai cấp toàn phương tuyến tính (quadratic-linear bi-level (QLB) programming):

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} c^T x + d^T y,$$

$$s.t. \quad y \in \operatorname{argmin}\{q(x,y) : p(x,y) \leq 0\},$$

trong đó

$$q(x,y) = x^T A_0 x + y^T B_0 y + 2a_0^T x + 2b_0^T y,$$

$$p(x,y) = x^T A_1 x + y^T B_1 y + 2a_1^T x + 2b_1^T y + \alpha,$$

với  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  là các ma trận đối xứng,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^m$  là các vector,  $i = 0, 1$ ; và  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Các hàm  $q(x,y)$ ,  $p(x,y)$  là các hàm toàn phương của các biến vector  $x, y$ . Đây là một lớp bài toán tối ưu có rất nhiều ứng dụng, từ an ninh nội địa (An, B., & et al., 2013), mạng lưới giao thông (Migdalas, A., 1995), đến chiến lược đầu tư (Hu, X., & Ralph, D., 2007),... Tuy nhiên, việc giải một bài toán tối ưu hai cấp là rất khó khăn, kể cả trường hợp đơn giản nhất là cả hai cấp đều tuyến tính. Cái khó nằm ở chỗ, các biến của bài toán cấp trên (upper level) lại là nghiệm tối ưu của bài toán cấp dưới (lower level). Bởi vì rất khó để nghiên cứu tính chất của hàm giá trị tối ưu

$$\varphi(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^m} q(x,y),$$

$$s.t. \quad p(x,y) \leq 0.$$

Mặc dù đã có nhiều kết quả về hàm giá trị tối ưu  $\varphi(x)$  (Gauvin, J., & Dubeau, F., 1982) nhưng dưới những điều kiện rất chặt. Vì vậy, những nghiên cứu trong lĩnh vực này thông thường sử dụng các phương pháp xấp xỉ.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi kết hợp các

kết quả đạt được gần đây về Bổ đề S (S-Lemma) (Pólik, I., & Terlaky, T., 2007), thuật toán phân tích hạng một của ma trận (rank-one decomposition algorithm) (Sturm, J.F., & Zhang, S.Z., 2003), điều kiện tối ưu của các bài toán SDP (semidefinite programming) (Ai, W., & Zhang, S.Z., 2009, Yang Q., 2005) để chứng minh rằng bài toán hai cấp (QLB) có thể được chuyển đổi tương đương thành bài toán tối ưu một cấp toàn phương thông thường. SDP là một lớp bài toán quy hoạch lồi, trong đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) của một hàm tuyến tính được xác định bởi tích vết của các ma trận trên nón các ma trận nửa xác định dương (xem bài toán  $(SP_x)$  ở Mục 3 dưới đây). Là lớp bài toán quy hoạch lồi nên SDP có thể được giải một cách hiệu quả. Tuy nhiên, trong bài báo này chúng ta không giải bài toán SDP vì nó còn phụ thuộc biến  $x$  của bài toán cấp trên, mà chúng ta sẽ khai thác các tính chất của chúng để làm cầu nối trung gian nhằm đưa bài toán hai cấp về bài toán một cấp.

### 2. NỘI DUNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

#### 2.1. Nội dung nghiên cứu

Kết hợp các kết quả về Bổ đề S, thuật toán phân tích hạng một của ma trận, khai thác các tính chất của ma trận nửa xác định dương, quy hoạch nửa xác định để tìm điều kiện tương đương cho phép biểu diễn tập nghiệm tối ưu của bài toán cấp dưới thành một hệ phương trình, bất phương trình. Qua đó chuyển đổi bài toán hai cấp về một cấp.

#### 2.2. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu toán lý thuyết: phân tích, tổng hợp, so sánh, đánh giá các kết quả, các tính chất của các đối tượng thông qua đọc, nghiên

<sup>1</sup>Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên.

Tác giả liên hệ: Lê Bá Thông; ĐT: 0978165041; Email: lbthong@ttn.edu.vn.